

A LÝ THUYẾT CẦN NHỚ

1 Công thức cộng

$$\oplus \sin(a+b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b$$

$$\oplus \sin(a-b) = \sin a \cos b - \cos a \sin b$$

$$\oplus \cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$$

$$\oplus \cos(a-b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b$$

$$\oplus \tan(a+b) = \frac{\tan a + \tan b}{1 - \tan a \tan b}$$

$$\oplus \tan(a-b) = \frac{\tan a - \tan b}{1 + \tan a \tan b}$$

2 Công thức nhân đôi

$$\oplus \sin 2a = 2 \sin a \cos a$$

$$\oplus \cos 2a = \cos^2 a - \sin^2 a$$

$$\oplus \cos 2a = 2 \cos^2 a - 1 = 1 - 2 \sin^2 a$$

$$\oplus \tan 2a = \frac{2 \tan a}{1 - \tan^2 a}$$

3 Công thức hạ bậc

$$\oplus \sin^2 a = \frac{1 - \cos 2a}{2}$$

$$\oplus \cos^2 a = \frac{1 + \cos 2a}{2}$$

$$\oplus \tan^2 a = \frac{1 - \cos 2a}{1 + \cos 2a}$$

4 Công thức biến đổi tích thành tổng

$$\oplus \cos a \cos b = \frac{1}{2} [\cos(a-b) + \cos(a+b)]$$

$$\oplus \sin a \sin b = \frac{1}{2} [\cos(a-b) - \cos(a+b)]$$

$$\oplus \sin a \cos b = \frac{1}{2} [\sin(a-b) + \sin(a+b)]$$

$$\oplus \cos a \sin b = \frac{1}{2} [\sin(a+b) - \sin(a-b)]$$

5 Công thức biến đổi tổng thành tích

$$\oplus \sin a + \sin b = 2 \sin \frac{a+b}{2} \cos \frac{a-b}{2}$$

$$\oplus \sin a - \sin b = 2 \cos \frac{a+b}{2} \sin \frac{a-b}{2}$$

$$\oplus \cos a + \cos b = 2 \cos \frac{a+b}{2} \cos \frac{a-b}{2}$$

$$\oplus \cos a - \cos b = -2 \sin \frac{a+b}{2} \sin \frac{a-b}{2}$$

Dạng 2: Giá trị lượng giác của góc lượng giác

Phương pháp: Sử dụng các công thức lượng giác đã nêu ở phần lý thuyết để giải quyết bài toán

BÀI TẬP TỰ LUẬN

Bài tập 1: Cho $\cos(a+2b) = 2\cos a$. Chứng minh rằng: $\tan(a+b) \cdot \tan b = -\frac{1}{3}$.

Lời giải

$$\text{Ta có: } \cos(a+2b) = 2\cos a \Leftrightarrow \cos[(a+b)+b] = 2\cos[(a+b)-b]$$

$$\Leftrightarrow 3\sin(a+b) \cdot \sin b = -\cos(a+b) \cdot \cos b \Leftrightarrow \tan(a+b) \cdot \tan b = -\frac{1}{3}.$$

Bài tập 2: Cho tam giác ABC , chứng minh rằng:

a) $\tan A + \tan B + \tan C = \tan A \cdot \tan B \cdot \tan C$ (với điều kiện tam giác ABC không vuông);

b) $\tan \frac{A}{2} \cdot \tan \frac{B}{2} + \tan \frac{B}{2} \cdot \tan \frac{C}{2} + \tan \frac{C}{2} \cdot \tan \frac{A}{2} = 1$

Lời giải

a) Do $A+B=\pi-C$ nên $\tan(A+B) = -\tan C \Leftrightarrow \frac{\tan A + \tan B}{1 - \tan A \tan B} = -\tan C$

$$\Leftrightarrow \tan A + \tan B + \tan C = \tan A \cdot \tan B \cdot \tan C.$$

b) Do $\frac{A}{2} + \frac{B}{2} = \frac{\pi}{2} - \frac{C}{2}$ nên $\tan\left(\frac{A}{2} + \frac{B}{2}\right) = \cot \frac{C}{2} \Leftrightarrow \frac{\tan \frac{A}{2} + \tan \frac{B}{2}}{1 - \tan \frac{A}{2} \tan \frac{B}{2}} = \frac{1}{\tan \frac{C}{2}}$

$$\Leftrightarrow \tan \frac{A}{2} \cdot \tan \frac{B}{2} + \tan \frac{B}{2} \cdot \tan \frac{C}{2} + \tan \frac{C}{2} \cdot \tan \frac{A}{2} = 1.$$

Bài tập 3: Chứng minh các đẳng thức lượng giác sau:

a) $\sin(60^\circ + \alpha) - \sin(60^\circ - \alpha) = \sin \alpha$

b) $\sin^4 \alpha + \cos^4 \alpha = \frac{3}{4} + \frac{1}{4} \cos 4\alpha$

c) $\sin \alpha (2\cos 4\alpha + 2\cos 2\alpha + 1) = \sin 5\alpha$

d) $\frac{\cos(\alpha - \beta)}{\cos(\alpha + \beta)} = \frac{1 + \tan \alpha \tan \beta}{1 - \tan \alpha \tan \beta}.$

Lời giải

a) $\sin(60^\circ + \alpha) - \sin(60^\circ - \alpha) = (\sin 60^\circ \cos \alpha + \cos 60^\circ \sin \alpha) - (\sin 60^\circ \cos \alpha - \cos 60^\circ \sin \alpha)$

$$= 2\cos 60^\circ \sin \alpha = 2 \cdot \frac{1}{2} \sin \alpha = \sin \alpha$$

b) $\sin^4 \alpha + \cos^4 \alpha = (\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha)^2 - 2\sin^2 \alpha \cos^2 \alpha$

$$= 1 - \frac{1}{2} \sin^2 2\alpha = 1 - \frac{1}{4} (1 - \cos 4\alpha) = 1 - \frac{1}{4} + \frac{1}{4} \cos 4\alpha = \frac{3}{4} + \frac{1}{4} \cos 4\alpha$$

$$c) \sin \alpha (2 \cos 4\alpha + 2 \cos 2\alpha + 1) = 2 \sin \alpha \cos 4\alpha + 2 \sin \alpha \cos 2\alpha + \sin \alpha$$

$$= 2 \cdot \frac{1}{2} [\sin(-3\alpha) + \sin 5\alpha] + 2 \cdot \frac{1}{2} [\sin(-\alpha) + \sin 3\alpha] + \sin \alpha$$

$$= (-\sin 3\alpha + \sin 5\alpha) + (-\sin \alpha + \sin 3\alpha) + \sin \alpha = \sin 5\alpha$$

$$d) \frac{\cos(\alpha - \beta)}{\cos(\alpha + \beta)} = \frac{\cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta}{\cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta} = \frac{\cos \alpha \cos \beta (1 + \tan \alpha \tan \beta)}{\cos \alpha \cos \beta (1 - \tan \alpha \tan \beta)} = \frac{1 + \tan \alpha \tan \beta}{1 - \tan \alpha \tan \beta}.$$

Bài tập 4: Rút gọn các biểu thức sau:

$$a) \frac{\sin \alpha + \sin 2\alpha}{1 + \cos \alpha + \cos 2\alpha} \quad b) \frac{\cos\left(\frac{\pi}{4} + \alpha\right) - \cos\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{4} + \alpha\right) - \sin\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right)} \quad c) \frac{\sin^2 \alpha}{4 - 4 \sin^2 \frac{\alpha}{2}}$$

Lời giải

$$a) \frac{\sin \alpha + \sin 2\alpha}{1 + \cos \alpha + \cos 2\alpha} = \frac{\sin \alpha + 2 \sin \alpha \cos \alpha}{1 + \cos \alpha + 2 \cos^2 \alpha - 1} = \frac{\sin \alpha (1 + 2 \cos \alpha)}{\cos \alpha (1 + 2 \cos \alpha)} = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \tan \alpha;$$

$$b) \frac{\cos\left(\frac{\pi}{4} + \alpha\right) - \cos\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{4} + \alpha\right) - \sin\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right)} = \frac{-2 \sin \frac{\pi}{2} \sin \frac{2\alpha}{2}}{2 \cos \frac{\pi}{2} \sin \frac{2\alpha}{2}} = -\frac{\sin \frac{\pi}{4} \sin \alpha}{\cos \frac{\pi}{4} \sin \alpha} = -\tan \frac{\pi}{4} = -1$$

$$c) \frac{\sin^2 \alpha}{4 - 4 \sin^2 \frac{\alpha}{2}} = \frac{\left(2 \sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2}\right)^2}{4 \left(1 - \sin^2 \frac{\alpha}{2}\right)} = \frac{4 \sin^2 \frac{\alpha}{2} \cos^2 \frac{\alpha}{2}}{4 \cos^2 \frac{\alpha}{2}} = \sin^2 \frac{\alpha}{2}$$

Bài tập 5: Chứng minh đẳng thức sau:

$$a) \sin^4 a + \cos^4 a = 1 - \frac{1}{2} \sin^2 2a = \frac{3}{4} + \frac{1}{4} \cos 4a. \quad b) \cos a - \sin a = \sqrt{2} \cos\left(a + \frac{\pi}{4}\right)$$

$$c) \sin a + \sqrt{3} \cos a = 2 \sin\left(a + \frac{\pi}{3}\right).$$

Lời giải

$$a) \sin^4 a + \cos^4 a = (\sin^2 a + \cos^2 a)^2 - 2 \sin^2 a \cos^2 a = 1 - 2 (\sin a \cos a)^2$$

$$= 1 - \frac{1}{2} \sin^2 2a = 1 - \frac{1}{2} \left(\frac{1 - \cos 4a}{2}\right) = 1 - \frac{1}{4} + \frac{1}{4} \cos 4a = \frac{3}{4} + \frac{1}{4} \cos 4a$$

$$b) \text{Ta có: } \sqrt{2} \cos\left(a + \frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2} \left(\cos a \cos \frac{\pi}{4} - \sin a \sin \frac{\pi}{4}\right)$$

$$= \sqrt{2} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \cos a - \frac{\sqrt{2}}{2} \sin a \right) = \sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot (\cos a - \sin a) = \cos a - \sin a$$

$$\text{c) Ta có: } 2 \sin \left(a + \frac{\pi}{3} \right) = 2 \left(\sin a \cos \frac{\pi}{3} + \cos a \sin \frac{\pi}{3} \right) = 2 \left(\frac{1}{2} \sin a + \frac{\sqrt{3}}{2} \cos a \right) = \sin a + \sqrt{3} \cos a.$$

Bài tập 6: Chứng minh rằng trong mọi tam giác ABC ta đều có

$$\sin A + \sin B + \sin C = 4 \cos \frac{A}{2} \cos \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2}.$$

Lời giải

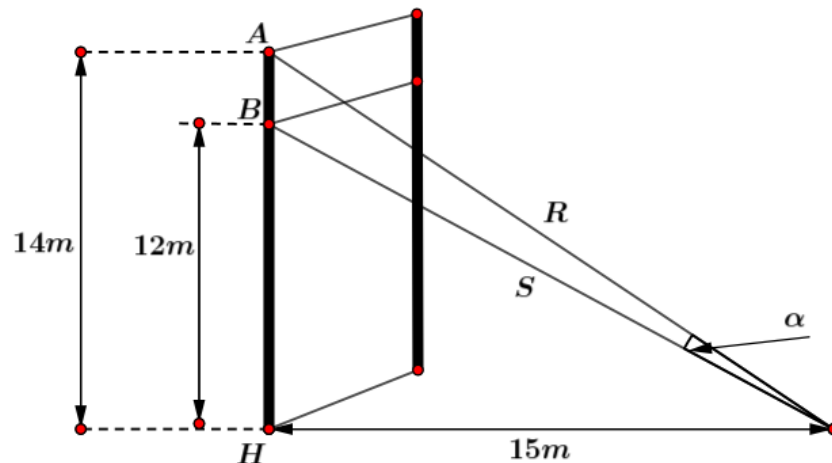
$$\text{Ta có: } VT = 2 \sin \frac{A+B}{2} \cos \frac{A-B}{2} + 2 \sin \frac{C}{2} \cos \frac{C}{2}.$$

$$\text{Mặt khác, trong tam giác } ABC \text{ ta có: } A+B+C=\pi \text{ nên } \frac{A+B}{2} = \frac{\pi}{2} - \frac{C}{2}.$$

$$\text{Từ đó suy ra: } \sin \frac{A+B}{2} = \cos \frac{C}{2}, \sin \frac{C}{2} = \cos \frac{A+B}{2}.$$

$$\begin{aligned} \text{Vậy } VT &= 2 \cos \frac{C}{2} \cos \frac{A-B}{2} + 2 \cos \frac{A+B}{2} \cos \frac{C}{2} \\ &= 2 \cos \frac{C}{2} \left(\cos \frac{A-B}{2} + \cos \frac{A+B}{2} \right) = 4 \cos \frac{C}{2} \cos \frac{A}{2} \cos \frac{B}{2} = VP \end{aligned}$$

Bài tập 7: Một sợi cáp R được gắn vào một cột thẳng đứng ở vị trí cách mặt đất 14 m. Một sợi cáp S khác cũng được gắn vào cột đó ở vị trí cách mặt đất 12 m. Biết rằng hai sợi cáp trên cùng được gắn với mặt đất tại một vị trí cách chân cột 15 m.



- Tính $\tan \alpha$ ở đó α là góc giữa hai sợi cáp trên.
- Tính số đo góc α (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị theo đơn vị độ).

Lời giải

$$\text{a) Ta có: } \alpha = AOH - BOH.$$

$$\text{Trong tam giác vuông } AOH \text{ ta có: } \tan AOH = \frac{AH}{OH} = \frac{14}{15}.$$

Trong tam giác vuông BOH ta có: $\tan BOH = \frac{BH}{OH} = \frac{12}{15} = \frac{4}{5}$.

$$\text{Vậy } \tan \alpha = \tan(AOH - BOH) = \frac{\tan AOH - \tan BOH}{1 + \tan AOH \cdot \tan BOH} = \frac{\frac{14}{15} - \frac{4}{5}}{1 + \frac{14}{15} \cdot \frac{4}{5}} = \frac{10}{131}.$$

b) Từ kết quả câu a ta có: $\alpha \approx 4^\circ$.

Bài tập 8: Trong vật lí thì phương trình tổng quát của một vật dao động điều hòa cho bởi công thức $x(t) = A \cos(\omega t + \varphi)$, trong đó t là thời điểm (tính bằng giây), $x(t)$ là li độ của vật tại thời điểm t , A là biên độ dao động ($A > 0$) và $\varphi \in [-\pi; \pi]$ là pha ban đầu của dao động. Xét hai dao động điều hòa có phương trình:

$$x_1(t) = 2 \cos\left(\frac{\pi}{3}t + \frac{\pi}{6}\right) (\text{cm}); x_2(t) = 2 \cos\left(\frac{\pi}{3}t - \frac{\pi}{3}\right) (\text{cm})$$

Tìm dao động tổng hợp $x(t) = x_1(t) + x_2(t)$ và sử dụng công thức biến đổi tổng thành tích để tìm biên độ và pha ban đầu của dao động tổng hợp này.

Lời giải

$$\text{Ta có: } x(t) = x_1(t) + x_2(t) = 2 \cos\left(\frac{\pi}{3}t + \frac{\pi}{6}\right) + 2 \cos\left(\frac{\pi}{3}t - \frac{\pi}{3}\right)$$

$$= 2 \left[2 \cos\left(\frac{\pi}{3}t - \frac{\pi}{12}\right) \cos \frac{\pi}{4} \right] = 2\sqrt{2} \cos\left(\frac{\pi}{3}t - \frac{\pi}{12}\right)$$

$$\text{Biên độ là } A = 2\sqrt{2} \text{ và pha ban đầu là } \varphi = -\frac{\pi}{12}$$

BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

PHẦN I. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn. Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ chọn một phương án.

Câu 1: Rút gọn biểu thức $A = \frac{1 - \sin a - \cos 2a}{\sin 2a - \cos a}$.

- A. 1. B. $\tan a$. C. $\frac{5}{2}$. D. $2 \tan a$.

Lời giải

$$\text{Ta có } A = \frac{1 - \sin a + 2 \sin^2 a - 1}{2 \sin a \cdot \cos a - \cos a} = \frac{\sin a (2 \sin a - 1)}{\cos a (2 \sin a - 1)} = \frac{\sin a}{\cos a} = \tan a.$$

Câu 2: Rút gọn biểu thức $A = \frac{\sin x + \sin \frac{x}{2}}{1 + \cos x + \cos \frac{x}{2}}$ được:

A. $\tan \frac{x}{2}$.

B. $\cot x$.

C. $\tan^2\left(\frac{\pi}{4} - x\right)$.

D. $\sin x$.

Lời giải

Ta có $\sin x = \sin\left(2 \cdot \frac{x}{2}\right) = 2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2}$; $1 + \cos x = 1 + \cos\left(2 \cdot \frac{x}{2}\right) = 2 \cos^2 \frac{x}{2}$

Do đó $A = \frac{2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2} + \sin \frac{x}{2}}{2 \cos^2 \frac{x}{2} + \cos \frac{x}{2}} = \frac{\sin \frac{x}{2} \left(2 \cos \frac{x}{2} + 1\right)}{\cos \frac{x}{2} \left(2 \cos \frac{x}{2} + 1\right)} = \tan \frac{x}{2}$.

Câu 3: Rút gọn biểu thức $A = \sin \alpha \cdot \cos^5 \alpha - \sin^5 \alpha \cdot \cos \alpha$.

A. $\frac{1}{2} \sin 2\alpha$.

B. $-\frac{1}{2} \sin 4\alpha$.

C. $\frac{3}{4} \sin 4\alpha$.

D. $\frac{1}{4} \sin 4\alpha$.

Lời giải

Ta có $\sin \alpha \cdot \cos^5 \alpha - \sin^5 \alpha \cdot \cos \alpha = \sin \alpha \cdot \cos \alpha (\cos^4 \alpha - \sin^4 \alpha)$

$= \frac{1}{2} \sin 2\alpha (\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha) (\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha)$

$= \frac{1}{2} \sin 2\alpha (\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha) = \frac{1}{2} \sin 2\alpha \cos 2\alpha = \frac{1}{4} \sin 4\alpha$.

Câu 4: Biểu thức $M = \cos(-53^\circ) \cdot \sin(-337^\circ) + \sin(307^\circ) \cdot \sin(113^\circ)$ có giá trị bằng:

A. $-\frac{1}{2}$.

B. $\frac{1}{2}$.

C. $-\frac{\sqrt{3}}{2}$.

D. $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Lời giải

Ấn máy tính được đáp án A.

Câu 5: Rút gọn biểu thức: $\sin(a - 17^\circ) \cdot \cos(a + 13^\circ) - \sin(a + 13^\circ) \cdot \cos(a - 17^\circ)$,
ta được

A. $\sin 2a$.

B. $\cos 2a$.

C. $-\frac{1}{2}$.

D. $\frac{1}{2}$.

Lời giải

Ta có: $\sin(a - 17^\circ) \cdot \cos(a + 13^\circ) - \sin(a + 13^\circ) \cdot \cos(a - 17^\circ) = \sin[(a - 17^\circ) - (a + 13^\circ)]$

$= \sin(-30^\circ) = -\frac{1}{2}$.

Câu 6: Giá trị của biểu thức $\cos \frac{37\pi}{12}$ bằng

A. $\frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$.

B. $\frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$.

C. $-\frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$.

D. $\frac{\sqrt{2} - \sqrt{6}}{4}$.

Lời giải

$\cos \frac{37\pi}{12} = \cos\left(2\pi + \pi + \frac{\pi}{12}\right) = \cos\left(\pi + \frac{\pi}{12}\right) = -\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) = -\cos\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}\right)$

$$= -\left(\cos\frac{\pi}{3}.\cos\frac{\pi}{4} + \sin\frac{\pi}{3}.\sin\frac{\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}.$$

Câu 7: Rút gọn biểu thức: $\cos(120^\circ - x) + \cos(120^\circ + x) - \cos x$ ta được kết quả là

- A. 0. B. $-\cos x$. C. $-2\cos x$. D. $\sin x - \cos x$.

Lời giải

$$\begin{aligned}\cos(120^\circ - x) + \cos(120^\circ + x) - \cos x &= -\frac{1}{2}\cos x + \frac{\sqrt{3}}{2}\sin x - \frac{1}{2}\cos x + \frac{\sqrt{3}}{2}\sin x - \cos x \\ &= -2\cos x.\end{aligned}$$

Câu 8: Khẳng định nào dưới đây sai?

- A. $2\sin^2 a = 1 - \cos 2a$. B. $\cos 2a = 2\cos a - 1$.
C. $\sin 2a = 2\sin a \cos a$. D. $\sin(a + b) = \sin a \cos b + \sin b \cos a$.

Lời giải

$$\text{Có } \cos 2a = 2\cos^2 a - 1$$

Câu 9: Gọi $M = \cos^4 15^\circ - \sin^4 15^\circ$ thì:

- A. $M = 1$. B. $M = \frac{\sqrt{3}}{2}$. C. $M = \frac{1}{4}$. D. $M = 0$.

Lời giải

$$\begin{aligned}M &= \cos^4 15^\circ - \sin^4 15^\circ = (\cos^2 15^\circ)^2 - (\sin^2 15^\circ)^2 = (\cos^2 15^\circ - \sin^2 15^\circ)(\cos^2 15^\circ + \sin^2 15^\circ) \\ &= \cos^2 15^\circ - \sin^2 15^\circ = \cos(2 \cdot 15^\circ) = \cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}.\end{aligned}$$

Câu 10: Giá trị đúng của $\cos\frac{2\pi}{7} + \cos\frac{4\pi}{7} + \cos\frac{6\pi}{7}$ bằng

- A. $\frac{1}{2}$. B. $-\frac{1}{2}$. C. $\frac{1}{4}$. D. $-\frac{1}{4}$.

Lời giải

Sử dụng máy tính dễ dàng có được đáp án B.

Câu 11: Cho hai góc nhọn a và b . Biết $\cos a = \frac{1}{3}$, $\cos b = \frac{1}{4}$.

Giá trị $\cos(a + b) \cdot \cos(a - b)$ bằng

- A. $-\frac{113}{144}$. B. $-\frac{115}{144}$. C. $-\frac{117}{144}$. D. $-\frac{119}{144}$.

Lời giải

$$\cos(a + b) \cdot \cos(a - b) = \frac{1}{2}(\cos 2a + \cos 2b) = \cos^2 a + \cos^2 b - 1 = \left(\frac{1}{3}\right)^2 + \left(\frac{1}{4}\right)^2 - 1 = -\frac{119}{144}$$

Câu 12: Nếu biết $\sin a = \frac{8}{17}$, $\tan b = \frac{5}{12}$ và a, b đều là các góc nhọn và dương thì $\sin(a - b)$ là:

A. $\frac{20}{220}$.

B. $-\frac{20}{220}$.

C. $\frac{21}{221}$.

D. $\frac{22}{221}$.

Lời giải

Ta có a, b đều là các góc nhọn và dương.

$$\sin a = \frac{8}{17} \Rightarrow \cos a = \sqrt{1 - \frac{64}{289}} = \frac{15}{17}.$$

$$\tan b = \frac{5}{12} \Rightarrow \cos b = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{25}{144}}} = \frac{12}{13} \Rightarrow \sin b = \tan b \cdot \cos b = \frac{5}{13}.$$

$$\Rightarrow \sin(a - b) = \frac{8}{17} \cdot \frac{12}{13} - \frac{15}{17} \cdot \frac{5}{13} = \frac{21}{221}.$$

Câu 13: Nếu $\tan x = 0.5$; $\sin y = \frac{3}{5}$ ($0 < y < 90^\circ$) thì $\tan(x + y)$ bằng:

A. 2.

B. 3.

C. 4.

D. 5.

Lời giải

$$\tan x = 0.5 = \frac{1}{2}, \sin y = \frac{3}{5} \left(0 < y < 90^\circ\right) \Rightarrow \cos y = \frac{4}{5} \Rightarrow \tan y = \frac{3}{4}.$$

$$\tan(x + y) = \frac{\tan x + \tan y}{1 - \tan x \cdot \tan y} = \frac{\frac{1}{2} + \frac{3}{4}}{1 - \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4}} = 2.$$

Câu 14: Gọi $M = \tan x - \tan y$ thì:

A. $M = \tan(x - y)$.

B. $M = \frac{\sin(x + y)}{\cos x \cdot \cos y}$.

C. $M = \frac{\sin(x - y)}{\cos x \cdot \cos y}$.

D. $M = \frac{\tan x - \tan y}{1 + \tan x \cdot \tan y}$.

Lời giải

$$\text{Ta có: } M = \tan x - \tan y = \frac{\sin x}{\cos x} - \frac{\sin y}{\cos y} = \frac{\sin x \cos y - \cos x \sin y}{\cos x \cos y} = \frac{\sin(x - y)}{\cos x \cos y}.$$

Câu 15: Gọi $M = \cos(a + b) \cdot \cos(a - b) - \sin(a + b) \cdot \sin(a - b)$ thì:

A. $M = 1 - 2\cos^2 a$.

B. $M = 1 - 2\sin^2 a$.

C. $M = \cos 4a$.

D. $M = \sin 4a$.

Lời giải

$$\begin{aligned} \text{Ta có: } M &= \cos(a + b) \cdot \cos(a - b) - \sin(a + b) \cdot \sin(a - b) \\ &= \cos(a + b + a - b) = \cos 2a = 1 - 2\sin^2 a. \end{aligned}$$

Câu 16: Nếu $\sin x + \cos x = \frac{1}{2}$ thì $\sin 2x$ bằng

A. $\frac{3}{4}$

B. $\frac{3}{8}$

C. $\frac{\sqrt{2}}{2}$

D. $\frac{-3}{4}$

Lời giải

$$\text{Ta có } \sin x + \cos x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \sin^2 x + 2\sin x \cos x + \cos^2 x = \frac{1}{4} \Leftrightarrow \sin 2x = \frac{-3}{4}$$

Câu 17: Biết $\sin \alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$ và $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$. Giá trị của $P = \cos\left(2\alpha - \frac{\pi}{3}\right)$ là

A. $P = 0$.

B. $P = -1$.

C. $P = \frac{1}{2}$.

D. $P = -\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Lời giải

$$\text{Ta có } \sin \alpha = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \cos^2 \alpha = 1 - \sin^2 \alpha = 1 - \frac{3}{4} = \frac{1}{4} \Leftrightarrow \cos \alpha = \pm \frac{1}{2}.$$

$$\text{Từ } \frac{\pi}{2} < \alpha < \pi \Rightarrow \cos \alpha < 0 \text{ nên } \cos \alpha = -\frac{1}{2}.$$

$$\text{Do đó } P = \cos\left(2\alpha - \frac{\pi}{3}\right) = \cos 2\alpha \cos \frac{\pi}{3} + \sin 2\alpha \sin \frac{\pi}{3}$$

$$= \left(2\cos^2 \alpha - 1\right) \cdot \frac{1}{2} + 2\sin \alpha \cos \alpha \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \cos^2 \alpha - \frac{1}{2} + \sqrt{3} \sin \alpha \cos \alpha = -1.$$

Câu 18: Biểu thức $\frac{1 + \sin 4\alpha - \cos 4\alpha}{1 + \sin 4\alpha + \cos 4\alpha}$ có kết quả rút gọn bằng:

A. $\sin 2\alpha$.

B. $\cos 2\alpha$.

C. $\tan 2\alpha$.

D. $\cot 2\alpha$.

Lời giải

$$\frac{1 + \sin 4\alpha - \cos 4\alpha}{1 + \sin 4\alpha + \cos 4\alpha} = \frac{2\sin^2 2\alpha + 2\sin 2\alpha \cos 2\alpha}{2\cos^2 2\alpha + 2\sin 2\alpha \cos 2\alpha} = \frac{2\sin 2\alpha (\sin 2\alpha + \cos 2\alpha)}{2\cos 2\alpha (\sin 2\alpha + \cos 2\alpha)} = \tan 2\alpha.$$

Câu 19: Biểu thức $\frac{3 - 4\cos 2\alpha + \cos 4\alpha}{3 + 4\cos 2\alpha + \cos 4\alpha}$ có kết quả rút gọn bằng:

A. $-\tan^4 \alpha$.

B. $\tan^4 \alpha$.

C. $-\cot^4 \alpha$.

D. $\cot^4 \alpha$.

Lời giải

$$\frac{3 - 4\cos 2\alpha + \cos 4\alpha}{3 + 4\cos 2\alpha + \cos 4\alpha} = \frac{3 - 4(1 - 2\sin^2 \alpha) + 2(1 - 2\sin^2 \alpha)^2 - 1}{3 + 4(2\cos^2 \alpha - 1) + 2(2\cos^2 \alpha - 1)^2 - 1}$$

$$= \frac{8\sin^2 \alpha - 8\sin^2 \alpha + 8\sin^4 \alpha}{8\cos^2 \alpha - 8\cos^2 \alpha + 8\cos^4 \alpha} = \tan^4 \alpha.$$

Câu 20: Khi $\alpha = \frac{\pi}{6}$ thì biểu thức $\frac{\sin^2 2\alpha + 4\sin^4 \alpha - 4\sin^2 \alpha \cdot \cos^2 \alpha}{4 - \sin^2 2\alpha - 4\sin^2 \alpha}$ có giá trị bằng.

A. $\frac{1}{3}$.

B. $\frac{1}{6}$.

C. $\frac{1}{9}$.

D. $\frac{1}{12}$.

Lời giải

$$\frac{\sin^2 2\alpha + 4\sin^4 \alpha - 4\sin^2 \alpha \cdot \cos^2 \alpha}{4 - \sin^2 2\alpha - 4\sin^2 \alpha} = \frac{4\sin^4 \alpha}{4(1 - \sin^2 \alpha) - 4\sin^2 \alpha \cdot \cos^2 \alpha}$$

$$= \frac{\sin^4 \alpha}{\cos^2 \alpha (1 - \sin^2 \alpha)} = \frac{\sin^4 \alpha}{\cos^4 \alpha} = \tan^4 \alpha \Rightarrow \text{BT} = \tan^4 \left(\frac{\pi}{6} \right) = \frac{1}{9}.$$

Câu 21: Nếu $\tan \frac{x}{2} = \frac{a}{b}$ thì biểu thức $a \sin x + b \cos x$ bằng:

- A. a . B. b . C. $\frac{a+b}{a}$. D. $\frac{a+b}{b}$.

Lời giải

$$\text{Đặt } t = \tan \frac{x}{2} = \frac{a}{b} \text{ nên } \sin x = \frac{2t}{1+t^2} = \frac{2\frac{a}{b}}{1+\frac{a^2}{b^2}} = \frac{2ab}{a^2+b^2}, \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2} = \frac{1-\frac{a^2}{b^2}}{1+\frac{a^2}{b^2}} = \frac{b^2-a^2}{a^2+b^2}.$$

$$\text{Vậy } a \sin x + b \cos x = \frac{2a^2b}{a^2+b^2} + \frac{b^3-a^2b}{a^2+b^2} = b.$$

Câu 22: Nếu $\tan \frac{x}{2} = \frac{1}{2}$ thì giá trị của biểu thức $\frac{\sin x}{2-3\cos x}$ bằng.

- A. 1. B. 2. C. 3. D. 4.

Lời giải

$$\text{Đặt } t = \tan \frac{x}{2} = \frac{1}{2} \text{ nên } \sin x = \frac{2t}{1+t^2} = \frac{2\frac{1}{2}}{1+\frac{1}{4}} = \frac{4}{5}, \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2} = \frac{1-\frac{1}{4}}{1+\frac{1}{4}} = \frac{3}{5}.$$

$$\text{Vậy } \frac{\sin x}{2-3\cos x} = \frac{\frac{4}{5}}{2-\frac{9}{5}} = 4.$$

Câu 23: Biết $\sin x = \frac{1}{3}$ và $90^\circ < x < 180^\circ$ thì biểu thức $\frac{1+\sin 2x+\cos 2x}{1+\sin 2x-\cos 2x}$ có giá trị bằng:

- A. $2\sqrt{2}$. B. $\frac{1}{2\sqrt{2}}$. C. $-2\sqrt{2}$. D. $-\frac{1}{2\sqrt{2}}$.

Lời giải

$$\text{Ta có: } \sin x = \frac{1}{3} \text{ và } 90^\circ < x < 180^\circ.$$

$$\Rightarrow \cos x = \frac{-2\sqrt{2}}{3}, \sin 2x = 2 \cdot \sin x \cdot \cos x = \frac{-4\sqrt{2}}{9}, \cos 2x = 1 - 2\sin^2 x = \frac{7}{9}$$

$$\text{Thay vào biểu thức ta được: } \frac{1+\sin 2x+\cos 2x}{1+\sin 2x-\cos 2x} = \frac{1-\frac{4\sqrt{2}}{9}+\frac{7}{9}}{1-\frac{4\sqrt{2}}{9}-\frac{7}{9}} = -2\sqrt{2}.$$

Câu 24: Rút gọn biểu thức $P = \cos(120^\circ + x) + \cos(120^\circ - x) - \cos x$ ta được kết quả là:

A. 0.

B. $-\cos x$.

C. $-2\cos x$.

D. $\sin x - \cos x$.

Lời giải

Ta có: $P = 2\cos 120^\circ \cos x - \cos x = -\cos x - \cos x = -2\cos x$.

Câu 25: Tính số $\cos 10^\circ \cdot \cos 30^\circ \cdot \cos 50^\circ \cdot \cos 70^\circ$ bằng

A. $\frac{1}{16}$.

B. $\frac{1}{8}$.

C. $\frac{3}{16}$.

D. $\frac{1}{4}$.

Lời giải

$$\begin{aligned}\cos 10^\circ \cdot \cos 30^\circ \cdot \cos 50^\circ \cdot \cos 70^\circ &= \cos 10^\circ \cdot \cos 30^\circ \cdot \frac{1}{2}(\cos 120^\circ + \cos 20^\circ) \\ &= \frac{\sqrt{3}}{4} \left(-\frac{\cos 10^\circ}{2} + \frac{\cos 30^\circ + \cos 10^\circ}{2} \right) = \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot \frac{1}{4} = \frac{\sqrt{3}}{16}.\end{aligned}$$

Câu 26: Cho biểu thức $A = \sin^2(a+b) - \sin^2 a - \sin^2 b$. Hãy chọn kết quả đúng

A. $A = 2\cos a \cdot \sin b \cdot \sin(a+b)$.

B. $A = 2\sin a \cdot \cos b \cdot \cos(a+b)$.

C. $A = 2\cos a \cdot \cos b \cdot \cos(a+b)$.

D. $A = 2\sin a \cdot \sin b \cdot \cos(a+b)$.

Lời giải

$$\begin{aligned}\text{Ta có : } A &= \sin^2(a+b) - \sin^2 a - \sin^2 b = \sin^2(a+b) - \frac{1-\cos 2a}{2} - \frac{1-\cos 2b}{2} \\ &= \sin^2(a+b) - 1 + \frac{1}{2}(\cos 2a + \cos 2b) = -\cos^2(a+b) + \cos(a+b)\cos(a-b) \\ &= \cos(a+b)[\cos(a-b) - \cos(a+b)] = 2\sin a \sin b \cos(a+b).\end{aligned}$$

Câu 27: Biết A, B, C là các góc của tam giác ABC , khi đó.

A. $\sin C = -\sin(A+B)$.

B. $\cos C = \cos(A+B)$.

C. $\tan C = \tan(A+B)$.

D. $\cot C = -\cot(A+B)$.

Lời giải

Vì A, B, C là các góc của tam giác ABC nên $A+B+C=180^\circ \Rightarrow C=180^\circ-(A+B)$.

Do đó C và $(A+B)$ là 2 góc bù nhau.

$$\Rightarrow \sin C = \sin(A+B); \cos C = -\cos(a+b); \tan C = -\tan(A+B); \cot C = \cot(A+B).$$

Câu 28: Biết A, B, C là các góc của tam giác ABC , khi đó.

A. $\cos\left(\frac{A+B}{2}\right) = \cos\frac{C}{2}$.

B. $\cos\left(\frac{A+B}{2}\right) = -\cos\frac{C}{2}$.

C. $\tan\left(\frac{A+B}{2}\right) = \cot\frac{C}{2}$.

D. $\cot\left(\frac{A+B}{2}\right) = \cot\frac{C}{2}$.

Lời giải

Vì A, B, C là các góc của tam giác ABC nên $A+B+C=180^\circ \Rightarrow C=180^\circ-(A+B)$.

$$\Rightarrow \frac{C}{2} = 90^\circ - \frac{A+B}{2}. \text{ Do đó } \frac{C}{2} \text{ và } \frac{A+B}{2} \text{ là 2 góc phụ nhau.}$$

$$\Rightarrow \sin \frac{C}{2} = \cos \frac{A+B}{2}; \cos \frac{C}{2} = \sin \frac{A+B}{2}; \tan \frac{C}{2} = \cot \frac{A+B}{2}; \cot \frac{C}{2} = \tan \frac{A+B}{2}.$$

PHẦN II. Câu trắc nghiệm đúng sai. Trong mỗi ý a), b), c), d) ở mỗi câu, thí sinh chọn đúng hoặc sai.

Câu 1: Không dùng máy tính cầm tay. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a) $\sin \frac{19\pi}{24} \cos \frac{37\pi}{24} = \frac{\sqrt{3} - \sqrt{2}}{4}$

b) $\cos \frac{41\pi}{12} - \cos \frac{13\pi}{12} = \sqrt{2}$

c) $\frac{\tan \frac{\pi}{7} + \tan \frac{3\pi}{28}}{1 + \tan \frac{6\pi}{7} \tan \frac{3\pi}{28}} = 2.$

d) $\sin \frac{\pi}{9} - \sin \frac{5\pi}{9} + \sin \frac{7\pi}{9} = 0$

Lời giải

a) Đúng: $\sin \frac{19\pi}{24} \cos \frac{37\pi}{24} = \frac{1}{2} \left[\sin \left(\frac{19\pi}{24} - \frac{37\pi}{24} \right) + \sin \left(\frac{19\pi}{24} + \frac{37\pi}{24} \right) \right]$

$$= \frac{1}{2} \left[\sin \left(-\frac{3\pi}{4} \right) + \sin \frac{7\pi}{3} \right] = \frac{1}{2} \left(-\sin \frac{3\pi}{4} + \sin \frac{\pi}{3} \right)$$

$$= \frac{1}{2} \left(-\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \right) = \frac{\sqrt{3} - \sqrt{2}}{4}$$

b) Sai: $\cos \frac{41\pi}{12} - \cos \frac{13\pi}{12} = -2 \sin \frac{\frac{41\pi}{12} + \frac{13\pi}{12}}{2} \sin \frac{\frac{41\pi}{12} - \frac{13\pi}{12}}{2} = -2 \sin \frac{9\pi}{4} \sin \frac{7\pi}{6}$

$$= 2 \sin \frac{\pi}{4} \sin \frac{\pi}{6} = 2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

c) Sai: $\frac{\tan \frac{\pi}{7} + \tan \frac{3\pi}{28}}{1 + \tan \frac{6\pi}{7} \tan \frac{3\pi}{28}} = \frac{\tan \frac{\pi}{7} + \tan \frac{3\pi}{28}}{1 + \tan \left(\pi - \frac{\pi}{7} \right) \tan \frac{3\pi}{28}} = \frac{\tan \frac{\pi}{7} + \tan \frac{3\pi}{28}}{1 - \tan \frac{\pi}{7} \tan \frac{3\pi}{28}} = \tan \left(\frac{\pi}{7} + \frac{3\pi}{28} \right) = \tan \frac{\pi}{4} = 1$

d) Đúng: $\sin \frac{\pi}{9} - \sin \frac{5\pi}{9} + \sin \frac{7\pi}{9} = \left(\sin \frac{\pi}{9} + \sin \frac{7\pi}{9} \right) - \sin \frac{5\pi}{9}$

$$= 2 \sin \frac{4\pi}{9} \cdot \cos \frac{\pi}{3} - \sin \frac{5\pi}{9} = \sin \frac{4\pi}{9} - \sin \frac{5\pi}{9} = 0.$$

Câu 2: Cho $\cos \alpha = \frac{11}{61}$ và $-\frac{\pi}{2} < \alpha < 0$. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a) $\sin\left(\frac{\pi}{6} - \alpha\right) = -\frac{60}{61}$

b) $\cot\left(\alpha + \frac{\pi}{4}\right) = -\frac{71}{49}$

c) $\cos\left(2\alpha + \frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$

d) $\tan\left(\frac{3\pi}{4} - 2\alpha\right) = -\frac{4799}{2159}$

Lời giải

a) Sai: Vì $-\frac{\pi}{2} < \alpha < 0$ nên $\sin \alpha < 0$.

$$\text{Do đó, } \sin \alpha = -\sqrt{1 - \cos^2 \alpha} = -\sqrt{1 - \left(\frac{11}{61}\right)^2} = -\frac{60}{61}.$$

$$\text{Suy ra } \sin\left(\frac{\pi}{6} - \alpha\right) = \sin \frac{\pi}{6} \cos \alpha - \cos \frac{\pi}{6} \sin \alpha = \frac{1}{2} \cdot \frac{11}{61} - \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \left(-\frac{60}{61}\right) = \frac{11 + 60\sqrt{3}}{122}.$$

b) Đúng: Ta có $\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{-\frac{60}{61}}{\frac{11}{61}} = -\frac{60}{11}.$

$$\text{Do đó } \cot\left(\alpha + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{\tan\left(\alpha + \frac{\pi}{4}\right)} = \frac{1 - \tan \alpha \tan \frac{\pi}{4}}{\tan \alpha + \tan \frac{\pi}{4}} = \frac{1 - \left(-\frac{60}{11}\right) \cdot 1}{\left(-\frac{60}{11}\right) + 1} = -\frac{71}{49}.$$

c) Sai: Ta có $\cos 2\alpha = 2\cos^2 \alpha - 1 = 2 \cdot \left(\frac{11}{61}\right)^2 - 1 = -\frac{3479}{3721};$

$$\sin 2\alpha = 2\sin \alpha \cos \alpha = 2 \cdot \left(-\frac{60}{61}\right) \cdot \frac{11}{61} = -\frac{1320}{3721}.$$

$$\Rightarrow \cos\left(2\alpha + \frac{\pi}{3}\right) = \cos 2\alpha \cos \frac{\pi}{3} - \sin 2\alpha \sin \frac{\pi}{3} = -\frac{3479}{3721} \cdot \frac{1}{2} - \left(-\frac{1320}{3721}\right) \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{-3479 + 1320\sqrt{3}}{7442}.$$

d) Đúng: Ta có $\tan 2\alpha = \frac{\sin 2\alpha}{\cos 2\alpha} = \frac{-\frac{1320}{3721}}{-\frac{3479}{3721}} = \frac{1320}{3479}.$

$$\text{Suy ra } \tan\left(\frac{3\pi}{4} - 2\alpha\right) = \frac{\tan\frac{3\pi}{4} - \tan 2\alpha}{1 + \tan\frac{3\pi}{4} \tan 2\alpha} = \frac{-1 - \frac{1320}{3479}}{1 + (-1) \cdot \frac{1320}{3479}} = -\frac{4799}{2159}.$$

Câu 3: Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a) $\sin x \cos^5 x - \cos x \sin^5 x = \sin 4x$

b) $\frac{\sin 3x \cos 2x + \sin x \cos 6x}{\sin 4x} = \cos 3x;$

c) $\frac{\cos x - \cos 2x + \cos 3x}{\sin x - \sin 2x + \sin 3x} = \cot 2x$

d) $\frac{2\sin(x+y)}{\cos(x+y) + \cos(x-y)} - \tan y = 1.$

Lời giải

a) $\sin x \cos^5 x - \cos x \sin^5 x = \sin x \cos x (\cos^4 x - \sin^4 x)$

$$= \frac{1}{2} \sin 2x (\cos^2 x - \sin^2 x) (\cos^2 x + \sin^2 x) = \frac{1}{2} \sin 2x \cos 2x = \frac{1}{4} \sin 4x$$

b) $\frac{\sin 3x \cos 2x + \sin x \cos 6x}{\sin 4x} = \frac{\frac{1}{2}(\sin x + \sin 5x) + \frac{1}{2}[\sin(-5x) + \sin 7x]}{\sin 4x}$

$$= \frac{\sin x + \sin 5x - \sin 5x + \sin 7x}{2 \sin 4x} = \frac{\sin x + \sin 7x}{2 \sin 4x} = \frac{2 \sin 4x \cos 3x}{2 \sin 4x} = \cos 3x;$$

c) $\frac{\cos x - \cos 2x + \cos 3x}{\sin x - \sin 2x + \sin 3x} = \frac{(\cos x + \cos 3x) - \cos 2x}{(\sin x + \sin 3x) - \sin 2x} = \frac{2 \cos 2x \cos x - \cos 2x}{2 \sin 2x \cos x - \sin 2x}$

$$= \frac{\cos 2x(2 \cos x - 1)}{\sin 2x(2 \cos x - 1)} = \frac{\cos 2x}{\sin 2x} = \cot 2x;$$

d) $\frac{2\sin(x+y)}{\cos(x+y) + \cos(x-y)} - \tan y = \frac{2(\sin x \cos y + \cos x \sin y)}{2 \cos x \cos y} - \tan y$

$$= \frac{\sin x}{\cos x} + \frac{\sin y}{\cos y} - \tan y = \tan x + \tan y - \tan y = \tan x.$$

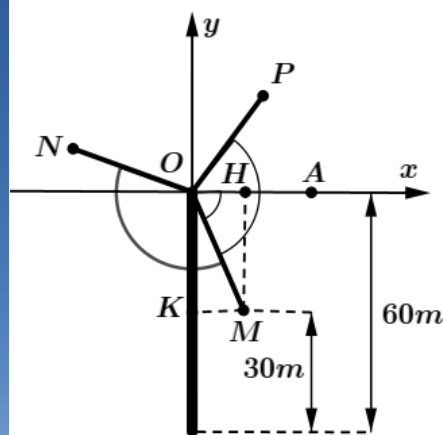
Câu 4: Trong hình vẽ dưới đây, ba điểm M, N, P nằm ở đầu các cánh quạt của tuabin gió. Biết các cánh quạt dài 31 m, độ cao của điểm M so với mặt đất là 30 m, góc giữa các cánh quạt là $\frac{2\pi}{3}$ và số góc (OA, OM) là α . Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a) $\sin \alpha = -\frac{\sqrt{61}}{31}$

b) Giá trị sin của góc lượng giác (OA, ON) là một số âm

c) Chiều cao của các điểm N và P so với mặt đất (theo đơn vị mét) khoảng 89,76 m.

d) Chiều cao của các điểm P so với mặt đất (theo đơn vị mét) khoảng 52,87 m.



Lời giải

Từ điểm M kẻ MH vuông góc với Ox , MK vuông góc với Oy .

Ta có: $MH = 60 - 30 = 30$ m khi đó hoành độ điểm M là 30.

$$\text{Mặt khác hoành độ điểm } M \text{ là: } x_M = 31 \cdot \cos \alpha \Rightarrow \cos \alpha = \frac{30}{31} \Rightarrow \sin \alpha = -\sqrt{1 - \left(\frac{30}{31}\right)^2} = -\frac{\sqrt{61}}{31}$$

Vì các cánh quạt tạo thành 3 góc bằng nhau nên $MOP = NOP = MON = 120^\circ$

$$\Rightarrow AOP = MOP - MOA \Rightarrow \sin AOP = \sin(MOP - MOA)$$

$$= \sin MOP \cdot \cos MOA - \cos MOP \cdot \sin MOA = \sin \frac{2\pi}{3} \cdot \cos \alpha - \cos \frac{2\pi}{3} \cdot \sin \alpha = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{30}{31} + \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{61}}{31} \approx 0,96.$$

Vì vậy chiều cao của điểm P so với mặt đất khoảng: $31 \cdot \sin \alpha + 60 = 89,76(\text{m})$

Ta có: $\cos AOP \approx \sqrt{1 - 0,96^2} = 0,28$ suy ra $AON = AOP + PON$

$$\Rightarrow \sin AON = \sin(AOP + PON) = \sin AOP \cdot \cos PON + \cos AOP \cdot \sin PON$$

$$= 0,96 \cdot \cos \frac{2\pi}{3} - 0,28 \cdot \sin \frac{2\pi}{3} = 0,96 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) + 0,28 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \approx -0,23.$$

$$\Rightarrow \sin(OA, ON) = \sin AON \approx -0,23.$$

Vì vậy chiều cao của điểm N so với mặt đất khoảng: $31 \cdot \sin \alpha + 60 = 52,87(\text{m})$

a) Đúng: $\sin \alpha = -\frac{\sqrt{61}}{31}$

b) Đúng: Giá trị sin của các góc lượng giác (OA, ON) là một số âm

c) Sai: Chiều cao của các điểm N và P so với mặt đất (theo đơn vị mét) khoảng 52,87 m.

d) Sai: Chiều cao của các điểm P so với mặt đất (theo đơn vị mét) khoảng 89,76 m.

PHẦN III. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn

Câu 1: Cho $\sin \alpha + \cos \alpha = m$. Có bao nhiêu giá trị của tham số m để $\sin 2\alpha = -\frac{3}{4}$.

Lời giải

$$\text{Ta có } \sin \alpha + \cos \alpha = \sqrt{2} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \sin \alpha + \frac{\sqrt{2}}{2} \cos \alpha \right) = \sqrt{2} \sin \left(\alpha + \frac{\pi}{4} \right).$$

$$\text{Vì } -1 \leq \sin \left(\alpha + \frac{\pi}{4} \right) \leq 1 \text{ nên } -\sqrt{2} \leq \sin \alpha + \cos \alpha \leq \sqrt{2}. \text{ Suy ra } -\sqrt{2} \leq m \leq \sqrt{2}.$$

$$\text{Ta lại có } (\sin \alpha + \cos \alpha)^2 = \sin^2 \alpha + 2 \sin \alpha \cos \alpha + \cos^2 \alpha = 1 + \sin 2\alpha.$$

$$\text{Suy ra } \sin 2\alpha = (\sin \alpha + \cos \alpha)^2 - 1 = m^2 - 1.$$

$$\text{Khi đó, } \sin 2\alpha = -\frac{3}{4} \text{ hay } m^2 - 1 = -\frac{3}{4} \text{ suy ra } m = \frac{1}{2} \text{ hoặc } m = -\frac{1}{2} \text{ (thỏa mãn điều kiện).}$$

Câu 2: Cho $\sin \alpha = \frac{3}{5}$, $\cos \beta = \frac{12}{13}$ và $0^\circ < \alpha, \beta < 90^\circ$. Biết $P = \sin(\alpha + \beta)$ và $Q = \cos(\alpha - \beta)$. Khi đó hãy tính giá trị của $P + Q$.

Lời giải

$$\text{Vì } 0^\circ < \alpha < 90^\circ \text{ nên } \cos \alpha > 0 \Rightarrow \cos \alpha = \sqrt{1 - \sin^2 \alpha} = \sqrt{1 - \left(\frac{3}{5}\right)^2} = \frac{4}{5}.$$

$$\text{Vì } 0^\circ < \beta < 90^\circ \text{ nên } \sin \beta > 0 \Rightarrow \sin \beta = \sqrt{1 - \cos^2 \beta} = \sqrt{1 - \left(\frac{12}{13}\right)^2} = \frac{5}{13}.$$

$$\text{Khi đó: } P = \sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta = \frac{3}{5} \cdot \frac{12}{13} + \frac{4}{5} \cdot \frac{5}{13} = \frac{56}{65}$$

$$Q = \cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta = \frac{4}{5} \cdot \frac{12}{13} + \frac{3}{5} \cdot \frac{5}{13} = \frac{63}{65}.$$

$$\text{Suy ra giá trị biểu thức } P + Q = \frac{56}{65} + \frac{63}{65} = \frac{119}{65}$$

Câu 3: Phương trình dao động điều hoà của một vật tại thời điểm t giây được cho bởi công thức $x(t) = A \cos(\omega t + \varphi)$, trong đó $x(t)$ cm là li độ của vật tại thời điểm t giây, A là biên độ dao động ($A > 0$) và $\varphi \in [-\pi; \pi]$ là pha ban đầu của dao động. Xét hai dao động điều hoà có phương trình lần lượt là:

$$x_1(t) = 3 \cos \left(\frac{\pi}{4} t + \frac{\pi}{3} \right) \text{ (cm) và } x_2(t) = 3 \cos \left(\frac{\pi}{4} t - \frac{\pi}{6} \right) \text{ (cm)}$$

Tìm biên độ dao động tổng hợp trên.

Lời giải

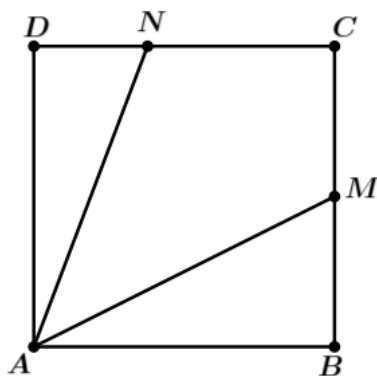
$$\text{Ta có } x(t) = x_1(t) + x_2(t) = 3 \cos \left(\frac{\pi}{4} t + \frac{\pi}{3} \right) + 3 \cos \left(\frac{\pi}{4} t - \frac{\pi}{6} \right)$$

$$\begin{aligned}
&= 3.2 \cos \frac{\left(\frac{\pi}{4}t + \frac{\pi}{3}\right) + \left(\frac{\pi}{4}t - \frac{\pi}{6}\right)}{2} \cdot \cos \frac{\left(\frac{\pi}{4}t + \frac{\pi}{3}\right) - \left(\frac{\pi}{4}t - \frac{\pi}{6}\right)}{2} \\
&= 6 \cos \frac{\frac{\pi}{4}t + \frac{\pi}{6}}{2} \cos \frac{\frac{\pi}{4}}{2} = 3\sqrt{2} \cos \left(\frac{\pi}{4}t + \frac{\pi}{12}\right).
\end{aligned}$$

Vậy phương trình của dao động tổng hợp là $x(t) = 3\sqrt{2} \cos \left(\frac{\pi}{4}t + \frac{\pi}{12}\right)$.

Dao động tổng hợp trên có biên độ là $A = 3\sqrt{2}$ (cm) và pha ban đầu là $\varphi = \frac{\pi}{12}$.

Câu 4: Trên một mảnh đất hình vuông $ABCD$ bác An đặt một chiếc đèn pin tại vị trí A chiếu chùm sáng phân kì sang phía góc C . Bác An nhận thấy góc chiếu sáng của đèn pin giới hạn bởi hai tia AM và AN mà ở đó các điểm $M \in BC$; $N \in DC$ sao cho $BM = \frac{1}{2}BC$, $DN = \frac{1}{3}DC$. Góc chiếu sáng của đèn pin bằng bao nhiêu độ?



Lời giải

Trong tam giác vuông ABM , $\tan BAM = \frac{BM}{BA} = \frac{1}{2}$.

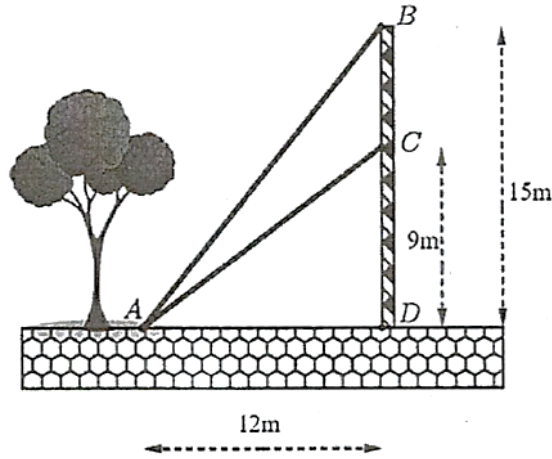
Trong tam giác vuông ADN , $\tan DAN = \frac{DN}{DA} = \frac{1}{3}$.

$$\text{Do đó: } \tan(BAM + DAN) = \frac{\tan BAM + \tan DAN}{1 - \tan BAM \tan DAN} = \frac{\frac{1}{2} + \frac{1}{3}}{1 - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3}} = 1$$

Do $\tan(BAM + DAN) = 1$ nên $BAM + DAN = 45^\circ \Rightarrow MAN = 90^\circ - (BAM + DAN) = 45^\circ$.

Vậy góc chiếu sáng của đèn pin bằng 45° .

Câu 5: Từ một vị trí A , người ta buộc hai sợi cáp AB và AC đến một cái trụ cao $15m$, được dựng vuông góc với mặt đất, chân trụ ở vị trí D . Biết $CD = 9m$ và $AD = 12m$. Tìm góc nhọn $\alpha = BAC$ tạo bởi hai sợi dây cáp đó, đồng thời tính gần đúng α (làm tròn đến hàng phần chục, đơn vị độ).

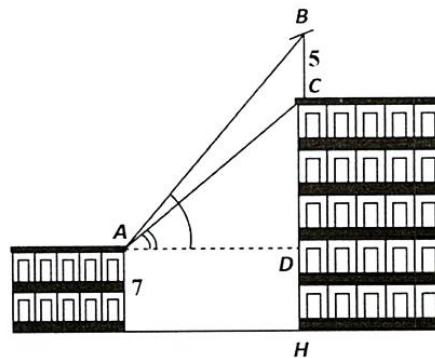


Lời giải

$$\text{Ta có: } \tan \alpha = \tan(BAD - CAD) = \frac{\tan BAD - \tan CAD}{1 + \tan BAD \tan CAD} = \frac{\frac{15}{12} - \frac{9}{12}}{1 + \frac{15}{12} \cdot \frac{9}{12}} = \frac{\frac{6}{12}}{1 + \frac{135}{144}} = \frac{1}{31} \Rightarrow \alpha \approx 1,91^\circ.$$

$$B = \frac{\sin 2x + 2 \sin 3x + \sin 4x}{\cos 3x + 2 \cos 4x + \cos 5x} = \frac{2 \sin 3x \cos x + 2 \sin 3x}{2 \cos 4x \cos x + 2 \cos 4x} = \frac{2 \sin 3x (\cos x + 1)}{2 \cos 4x (\cos x + 1)} = \frac{\sin 3x}{\cos 4x}$$

Câu 6: Trên nóc một tòa nhà có một cột ăngten cao 5 m. Từ vị trí quan sát A cao 7 m so với mặt đất, có thể nhìn thấy đỉnh B và chân C của cột ăngten dưới góc α và β so với phương nằm ngang. Biết chiều cao của tòa nhà là 18,9 m, hai tòa nhà cách nhau 10 m. Tính góc α (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị theo đơn vị độ).



Lời giải

Ta có: $AD = 10$ và $CD = 18,9 - 7 = 11,9$ m; $BD = BC + CD = 11,9 + 5 = 16,9$ m

$$\text{Suy ra } \tan \alpha = \frac{BD}{AD} = \frac{16,9}{10} \Rightarrow \alpha = 59^\circ.$$

Câu 7: Trong Vật lí, phương trình tổng quát của một vật dao động điều hoà cho bởi công thức $x(t) = A \cos(\omega t + \varphi)$, trong đó t là thời điểm (tính bằng giây), $x(t)$ là li độ của vật tại thời điểm t , A là biên độ dao động ($A > 0$) và $\varphi \in [-\pi; \pi]$ là pha ban đầu của dao động. Xét hai dao động điều hoà có phương trình: $x_1(t) = 3 \cdot \cos\left(\frac{\pi}{6}t + \frac{\pi}{6}\right)$ (cm); $x_2(t) = 3 \cdot \cos\left(\frac{\pi}{6}t + \frac{\pi}{4}\right)$ (cm). Tìm dao

động tổng hợp $x(t) = x_1(t)x_2(t)$ và sử dụng công thức biến đổi tổng thành tích để tìm biên độ và pha ban đầu của dao động tổng hợp này.

Lời giải

$$\text{Ta có: } x(t) = x_1(t)x_2(t) = 3\cos\left(\frac{\pi}{6}t + \frac{\pi}{6}\right) + 3\cos\left(\frac{\pi}{6}t + \frac{\pi}{4}\right)$$

$$= 3.2 \left[\cos\left(\frac{\frac{\pi}{6}t + \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{6}t + \frac{\pi}{4}}{2}\right) \cos\left(\frac{\frac{\pi}{6}t + \frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{6}t - \frac{\pi}{4}}{2}\right) \right]$$

$$= 6\cos\left(\frac{\pi}{6}t + \frac{5\pi}{24}\right) \cdot \cos\left(-\frac{\pi}{24}\right) = 6\cos\left(\frac{\pi}{24}\right) \cdot \cos\left(\frac{\pi}{6}t + \frac{5\pi}{24}\right)$$

Vậy biên độ của dao động là $6\cos\left(\frac{\pi}{24}\right)$. Pha ban đầu của chuyển động là $\frac{5\pi}{24}$.

Câu 8: Hai sóng âm có phương trình lần lượt là $f_1(t) = C\sin\omega t$ và $f_2(t) = C\sin(\omega t + \alpha)$. Hai sóng này giao thoa với nhau tạo nên một âm kết hợp có phương trình

$$f(t) = f_1(t) + f_2(t) = C\sin\omega t + C\sin(\omega t + \alpha).$$

Khi $C = 10, \alpha = \frac{\pi}{3}$. Hãy tìm biên độ của sóng âm kết hợp, tức là tìm hai hằng số k và φ sao cho

$$f(t) = k\sin(\omega t + \varphi).$$

Lời giải

$$\text{Ta có: } f(t) = f_1(t) + f_2(t) = C\sin\omega t + C\sin(\omega t + \alpha) = C\sin\omega t + C(\sin\omega t \cos\alpha + \cos\omega t \sin\alpha)$$

$$\text{Vậy } f(t) = C(1 + \cos\alpha)\sin\omega t + C\sin\alpha\cos\omega t = A\sin\omega t + B\cos\omega t \text{ với } \begin{cases} A = C(1 + \cos\alpha) \\ B = C\sin\alpha \end{cases}$$

$$\text{Khi } C = 10, \alpha = \frac{\pi}{3}$$

$$\text{Ta có: } f(t) = 10\sin\omega t + 10\sin\left(\omega t + \frac{\pi}{3}\right) = 10.2\sin\left(\omega t + \frac{\pi}{6}\right)\cos\frac{\pi}{6} = 10\sqrt{3}\sin\left(\omega t + \frac{\pi}{6}\right).$$

Vậy biên độ và pha ban đầu của sóng âm kết hợp lần lượt là $k = 10\sqrt{3}, \varphi = \frac{\pi}{6}$.

-----**HẾT**-----